BAB 5
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada bab sebelumnya, diperoleh beberapa kesimpulan, yaitu:

1. Definisi baru turunan fraksional yang disajikan oleh Khalil, et al. (2014) yang dinamakan turunan fraksional konformabel dinyatakan dengan definisi berikut ini:
   i. diberikan fungsi $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$. Turunan fraksional konformabel dari f berorde $\alpha \in (0,1)$ didefinisikan dengan
   $$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}.$$
   Definisi tersebut terbukti memenuhi sifat-sifat pada turunan biasa yang tidak dapat dipenuhi oleh turunan fraksional Riemann-Liouville dan Caputo;
   ii. diketahui $\alpha \in (n, n+1]$ dengan $n = 0,1,2, \ldots$ dan f adalah fungsi yang terdiferensial sampai n kali di $t > 0$. Turunan fraksional konformabel berorde α untuk f didefinisikan dengan
   $$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{(\lceil\alpha\rceil - 1)}\left(t + \varepsilon t^{(\lceil\alpha\rceil - \alpha)}\right) - f^{(\lceil\alpha\rceil - 1)}(t)}{\varepsilon}$$
   dengan $\lceil\alpha\rceil$ merupakan bilangan bulat terkecil yang lebih besar daripada atau sama dengan α.
2. Integral fraksional konformabel dengan orde $\alpha > 0$ dengan $\alpha \in (n, n+1]$ dan $n = 0,1,2, \ldots.$ untuk fungsi f didefinisikan sebagai
   $$J_t^\alpha f(t) = \frac{1}{n!} \int_0^t (t-s)^n s^{\alpha-n-1} f(s)\, ds.$$
3. Penyelesaian persamaan diferensial fraksional konformabel
   $$T_\alpha^\alpha y(t) = \lambda y(t), \qquad y(0) = y_0, \qquad t > 0$$

diperoleh menggunakan transformasi laplace fraksional. Kemudian, diperoleh solusi masalah nilai awal untuk turunan fraksional konformabel sebagai berikut:

$$y(t) = \mathcal{L}_{\alpha}^{-1}\left(\frac{y_0}{s-\lambda}\right)(t) = y_0\mathcal{L}_{\alpha}^{-1}\left(\frac{1}{s-\lambda}\right)(t) = y_0 e^{\lambda\frac{t^{\alpha}}{\alpha}}.$$

4. Simulasi numerik penyelesaian-penyelesaian masalah nilai awal persamaan diferensial biasa fraksional yang dilakukan dengan menggunakan *software* Maple13 memperlihatkan bahwa grafik solusi turunan fraksional Riemann-Liouville dan konformabel relatif saling berdekatan untuk $0 < \alpha < 1$ namun tidak untuk turunan fraksional Caputo. Grafik-grafik penyelesaian ketiga turunan fraksional tersebut relatif berdekatan untuk $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Jika nilai α semakin mendekati 1 maka grafik-grafik penyelesaian dengan ketiga turunan fraksional tersebut semakin saling mendekati.

Secara umum, dapat disimpulkan bahwa turunan fraksional konformabel dapat digunakan sebagai alternatif selain turunan fraksional Riemann-Liouville dan Caputo untuk $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Keuntungan dari penggunaan turunan fraksional konformabel ini terletak pada pendefinisiannya yang lebih sederhana dari pendefinisian turunan fraksional Riemann-Liouville dan Caputo. Keuntungan lainnya adalah sifat-sifat turunan biasa yang tidak dipenuhi oleh turunan fraksional Riemann-Liouville dan Caputo ternyata dipenuhi oleh turunan fraksional konformabel.

5.2 Saran

Pada skripsi ini, persamaan diferensial fraksional yang dibahas masih terbatas pada persamaan diferensial fraksional biasa yang homogen. Oleh karena itu, untuk skripsi berikutnya, penulis menyarankan untuk membahas persamaan diferensial fraksional biasa yang tidak homogen atau bahkan persamaan diferensial parsial fraksional dengan menggunakan turunan fraksional konformabel.