

ABSTRAK

Pada aljabar linier, pembahasan matriks dilakukan pada objek lapangan himpunan semua bilangan riil. Penentuan rank matriks dilakukan dengan memanfaatkan basis pada ruang baris atau ruang kolom. Pada pembahasan matriks atas *ring* komutatif, penentuan basis pada ruang baris atau ruang kolom belum tentu bisa dilakukan. Dengan demikian, penentuan rank matriks atas ring komutatif tidak dapat dilakukan dengan metode penentuan rank menggunakan basis pada ruang baris atau ruang kolom, seperti halnya pada pembahasan rank dalam aljabar linier. Penelitian ini membahas tentang rank matriks atas *ring* komutatif serta sifat-sifatnya. Pada penelitian ini, rank matriks atas *ring* komutatif dicari dengan memanfaatkan konsep *annihilator* dari ideal yang terbentuk dari minor. Selanjutnya, ditunjukkan sifat yang berkaitan dengan hubungan antara rank suatu matriks dengan rank transposenya, serta batasan rank pada perkalian matriks. Hasil penelitian menunjukkan bahwa rank matriks atas *ring* komutatif adalah nilai maksimum t pada *annihilator* dari semua ideal yang dibentuk oleh minor-minor $t \times t$ yang hanya memuat nol. Selanjutnya, berdasarkan beberapa sifat dasar rank matriks atas *ring* komutatif diperoleh bahwa rank dari suatu matriks selalu berada di antara nol dan minimum dari jumlah baris dan kolomnya. Kedua, rank suatu matriks akan sama dengan rank transposenya. Ketiga, rank suatu matriks akan bernilai nol jika dan hanya jika nilai *annihilator* dari ideal yang dibentuk oleh minor berukuran 1×1 tidak hanya memuat nol. Keempat, rank hasil kali dua matriks tidak pernah lebih besar dari rank terkecil di antara kedua matriks tersebut.

Kata kunci: rank, *ring* komutatif, minor, *annihilator*

ABSTRACT

In linear algebra, matrices are discussed within the context of a field, specifically the set of all real numbers. Matrix rank is determined by utilizing the basis of either the row space or the column space. In the study of matrices over a commutative ring, however, defining a basis for the row or column space is not always possible. Thus, determining the rank of a matrix over a commutative ring cannot be done using the same method of rank determination by basis as in linear algebra. This research examines the rank of matrices over commutative rings and their properties. In this study, the rank of a matrix over a commutative ring is determined using the concept of the annihilator of the ideal formed by minors. Additionally, properties related to the relationship between the rank of a matrix and the rank of its transpose, as well as rank bounds in matrix multiplication, are demonstrated. The results of the study show that the rank of a matrix over a commutative ring is the maximum value of t for which the annihilator of all ideals formed by $t \times t$ minors contains only zero elements. Moreover, based on several fundamental properties of the rank of matrices over a commutative ring, it is concluded that the rank of a matrix always lies between zero and the minimum of its number of rows and columns. Second, the rank of a matrix is equal to the rank of its transpose. Third, the rank of a matrix is zero if and only if the annihilator of the ideal formed by 1×1 minors contains non-zero elements. Fourth, the rank of the product of two matrices is never greater than the smallest rank of the two matrices.

Keywords: rank, commutative ring, minor, annihilator

